Proceedings of IAM, V.3, N.1, 2014, pp.123-137

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

Е.Ю. Мустафаева[1]

[1]Факультет Прикладной Математики и Кибернетики
Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан
e-mail: helenmust@rambler.ru

Резюме. Рассматривается смешанная задача для уравнения колебаний струны со специальными линейными граничными условиями. Эти граничные условия такие, что после разделения переменных или после преобразования Лапласа полученная спектральная граничная задача либо не имеет собственных значений либо вся комплексная плоскость является спектром этой задачи. Причиной этого явления является то, что для существования решения смешанной задачи начальные данные не могут быть произвольными, они должны быть зависимыми.

Ключевые слова: смешанная спектральная задача, специальное условие, уравнение колебания струны, преобразование Лапласа.

AMS Subject Classification: 58J45, 47Axx, 47Bxx, 47F05.

1. Введение

Исследуется смешанная задача для уравнения колебания струны, к которой не применим универсальный метод разделения переменных ([1], [2]) и преобразования Лапласа [2], [4]. Патология заключается в том, что для полученной однородной граничной задачи с параметром либо отсутствует спектр либо вся комплексная плоскость является спектром.

Как известно, при исследовании решений задачи Коши для гиперболического уравнения начальные данные являются произвольными (независимыми) функциями.

Полученная патология при исследовании решений смешанной задачи для гиперболического уравнения приводит к тому, что решения смешанной задачи могут существовать лишь в случае, когда начальные данные не являются произвольными, а между ними имеется какая-то связь [5]. Эта связь устанавливается с помощью метода характеристик [5].

2. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{1}$$

$$\alpha_{i0}u(0,t)+\alpha_{i1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}+\beta_{i0}u(1,t)+\beta_{i1}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1}=0, \tag{2}$$

$$i=1,2;\ t>0,$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0}=\varphi_k(x),\ k=0,1;\quad x\in[0,1], \tag{3}$$

где $\alpha_{i\gamma}$ и $\beta_{i\gamma}$, $i=1,2;\ \gamma=0,1$ вещественные постоянные числа, $\varphi_k(x),\ k=0,1$ - вещественнозначные непрерывные функции.

Если применить метод разделения переменных [1] или же преобразования Лапласа [3], то приходим к следующей вспомогательной однородной граничной задаче с параметром:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad x\in(0,1), \tag{4}$$

$$\alpha_{i0}X(0)+\alpha_{i1}X'(0)+\beta_{i0}X(1)+\beta_{i1}X'(1)=0,\quad i=\overline{1,2}, \tag{5}$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$- комплексный параметр.

Учитывая, что общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$X(x)=C_1\cos\lambda x+C_2\sin\lambda x, \tag{6}$$

то после подстановки (6) в условия (5) приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$(\alpha_{i0}+\beta_{i0}\cos\lambda-\beta_{i1}\lambda\sin\lambda)C_1+(\alpha_{i1}\lambda+\beta_{i0}\sin\lambda+\beta_{i1}\lambda\cos\lambda)C_2=0, \tag{7}$$

$i=1,2.$

Лемма 1. Если определитель $\Delta(\lambda)$ системы (7) обращается в нуль тождественно, то граничные условия (5) принимают вид:

$$X(1)=X(0),\quad X'(1)=-X'(0), \tag{8}$$

либо

$$X(1)=-X(0),\quad X'(1)=X'(0), \tag{9}$$

и граничные условия (2) принимают вид, соответственно,

$$u(0,t)=u(1,t),\qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=-\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} \tag{8'}$$

или

$$u(0,t)=-u(1,t),\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}. \tag{9'}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие теоремы, т.е.

$$\Delta(\lambda)=(\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}+\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11})\lambda+(\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10})\sin\lambda+$$
$$+(\alpha_{10}\beta_{21}+\beta_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}-\beta_{20}\alpha_{11})\lambda\cos\lambda+(\beta_{21}\alpha_{11}-\alpha_{21}\beta_{11})\lambda^2\sin\lambda\equiv 0,$$

тогда для любого $\lambda \in \mathbf{C}$ в силу независимости функций $\lambda, \sin\lambda, \lambda\cos\lambda$ и $\lambda^2\sin\lambda$ имеем:

$$\alpha_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\alpha_{11}+\beta_{10}\beta_{21}-\beta_{20}\beta_{11}=0,$$
$$\alpha_{10}\beta_{20}-\alpha_{20}\beta_{10}=0,$$
$$\alpha_{10}\beta_{21}+\beta_{10}\alpha_{21}-\alpha_{20}\beta_{11}-\beta_{20}\alpha_{11}=0,$$
$$\beta_{21}\alpha_{11}-\alpha_{21}\beta_{11}=0,$$

откуда получаем, что

$$\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{20}}=\frac{\beta_{10}}{\beta_{20}}=t, \qquad \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{21}}=\frac{\beta_{11}}{\beta_{21}}=\tau \tag{10}$$

и

$$(\alpha_{20}\alpha_{21}+\beta_{20}\beta_{21})(t-\tau)=0,\ (\alpha_{20}\beta_{21}+\beta_{20}\alpha_{21})(t-\tau)=0.$$

Предположим, что $t\neq\tau$, в противном случае граничные условия (2) или (5) становятся линейно зависимыми.

Поэтому

$$\frac{\alpha_{20}}{\beta_{20}}=-\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{20}}{\beta_{20}}=-\frac{\alpha_{21}}{\beta_{21}},$$

откуда имеем:

$$\alpha_{21}^2=\beta_{21}^2, \text{ или же } \alpha_{21}=\pm\beta_{21}.$$

Тогда

$$\alpha_{20}=\mp\beta_{20},\ \ \alpha_{11}=\pm\beta_{11}, \qquad \alpha_{10}=\mp\beta_{10}.$$

Подставляя полученные соотношения для коэффициентов α_{ij}, β_{ij} в граничные условия (5), получим:

$$\begin{cases}\beta_{10}[X(1)\mp X(0)]+\beta_{11}[X'(1)\pm X'(0)]=0,\\ \beta_{20}[X(1)\mp X(0)]+\beta_{21}[X'(1)\pm X'(0)]=0.\end{cases}$$

В силу того, что

$$\begin{vmatrix}\beta_{10} & \beta_{11}\\ \beta_{20} & \beta_{21}\end{vmatrix}\neq 0,$$

получаем утверждение леммы 1 (в противном случае граничные условия (5) являются линейно зависимыми).

Теперь рассмотрим случай, когда задача (4), (5) не имеет спектра. Для этого, исходя из выражения для $\Delta(\lambda)$, приходим к соотношениям (10) и

$$\frac{\alpha_{20}}{\alpha_{21}}=-\frac{\beta_{20}}{\beta_{21}}=h, \tag{11}$$

которые приводят нас к соотношению

$$\Delta(\lambda)=(t-\tau)h\left(\alpha_{21}^2-\beta_{21}^2\right)\lambda\,. \tag{12}$$

Таким образом, имеет место

Лемма 2. Если справедливы (10), (11) и

$$\alpha_{21}^2 \neq \beta_{21}^2, \tag{13}$$

то для $\Delta(\lambda)$ верно соотношение (12).

Из этой леммы следует, что $\Delta(\lambda)=0$ только при $\lambda=0$. Возвращаясь к задаче (4), (5), при $\lambda=0$ имеем

$$X''(x)=0$$

с граничным условием (5). Легко видеть, что общее решение здесь имеет вид:

$$X(x)=C_0+C_1x\,. \tag{14}$$

Подставляя (14) в (5), получим:

$$(\alpha_{i0}+\beta_{i0})C_0+(\alpha_{i1}+\beta_{i0}+\beta_{i1})C_1=0,\quad i=1,2.$$

Определитель полученной системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix}\alpha_{10}+\beta_{10} & \alpha_{11}+\beta_{10}+\beta_{11}\\ \alpha_{20}+\beta_{20} & \alpha_{21}+\beta_{20}+\beta_{21}\end{vmatrix}=(t-\tau)h\left(\alpha_{21}^2-\beta_{21}^2\right)\neq 0\,,$$

т.е. $\lambda=0$ не является собственным значением задачи (4), (5). Тогда, учитывая условие (13), получаем, что $\Delta(\lambda)\neq 0$, т.е. задача (4), (5) не имеет спектра.

В этом случае граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases}X(1)=\mu X(0),\\ X'(1)=-\mu X'(0),\end{cases} \tag{15}$$

или, соответственно,

$$u(0,t)=\mu u(1,t),\ \frac{\partial u(1,t)}{\partial x}=-\mu\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\,, \tag{15'}$$

где μ - произвольная постоянная, $\mu\neq\pm1$. Этим доказана следующая

Теорема 1. Если граничные условия (5) имеют вид (8) или (9), то вся комплексная плоскость является спектром для граничной задачи (4), (8) или (4),(9). Если же граничные условия принимают вид (15), где $\mu\neq\pm1$ - произвольная постоянная, то граничная задача (4),(15) с комплексным параметром не имеет спектра.

3. Случай, когда вся плоскость является спектром

Пусть выполняются граничные условия (8) или (9) или, соответственно, граничные условия (8') или (9')

$$\begin{cases} u(1,t) = \pm\, u(0,t), \\ \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1} = \mp \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0},\ t \ge 0, \end{cases}$$

что соответствует случаю $\Delta(\lambda) \equiv 0$ во всей комплексной плоскости, т.е. когда вся плоскость является спектром.

В этом случае применим метод характеристик [5] к смешанной задаче (1)-(3). Для этого, отбрасывая границы по переменной *x*, т.е. отбрасывая границы *x*=0 и *x*=1, $t \ge 0$, мы получим верхнюю полуплоскость плоскости (*x*,*t*), где $x \in R, t > 0$. Таким образом, вместе с границей отбрасываются и граничные условия и получается задача Коши на полуплоскости $x \in R, t > 0$. Начальные данные (3) при $x \in [0,1]$ будем предполагать продолженными из $[0,1]$ в R с помощью граничного условия (8) или (9) или же (15).

Как известно, решение задачи Коши для уравнения колебаний струны представляется формулой Даламбера [6]:

$$u(x,t) = \frac{\Phi_0(x+t) + \Phi_0(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \Phi_1(\xi)d\xi, \tag{16}$$

где $\Phi_k(x),\ k = 0,1; x \in R$, - продолжения начальной функции $\varphi_k(x),\ k = 0,1;\ x \in (0,1)$. Тогда сужение (16) на полуполосу $x \in [0,1], t \ge 0$ даст нам решение поставленной смешанной задачи.

Теперь дадим продолжение начальных данных на всю вещественную ось . Для этого, подставляя (16) в граничные условия (8) или (9) с учетом

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\Phi_0'(x+t) + \Phi_0'(x-t)}{2} + \frac{\Phi_1(x+t) - \Phi_1(x-t)}{2}.$$

имеем

$$\begin{cases} \Phi_0(1+t) + \Phi_0(1-t) + \displaystyle\int_{1-t}^{1+t} \Phi_1(\xi)d\xi = \\ \quad = \pm[\Phi_0(t) + \Phi_0(-t) + \displaystyle\int_{-t}^{t} \Phi_1(\xi)d\xi], \\ \Phi_0'(1+t) + \Phi_0'(1-t) + \Phi_1(1+t) - \Phi_1(1-t) = \\ \quad = \mp[\Phi_0'(t) + \Phi_0'(-t) + \Phi_1(t) - \Phi_1(-t)],\ t \ge 0. \end{cases} \tag{17}$$

Пусть $t \in [0,1]$. Тогда из (17), учитывая граничное условие (3) получаем:

$$\begin{cases} \Phi_0(1+t)+\varphi_0(1-t)+\int\limits_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi+\int\limits_{t}^{1+t}\Phi_1(\xi)d\xi= \\ \quad =\pm[\varphi_0(t)+\Phi_0(-t)+\int\limits_{-t}^{0}\Phi_1(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi], \\ \Phi_0'(1+t)+\varphi_0'(1-t)+\Phi_1(1+t)-\varphi_1(1-t)= \\ \quad =\mp[\varphi_0'(t)+\Phi_0'(-t)+\varphi_1(t)-\Phi_1(-t)],\ t\in[0,1]. \end{cases} \tag{18}$$

Интегрируя второе соотношение из (18) от нуля до t, получаем:

$$\int\limits_0^t\Phi_0'(1+\xi)d\xi+\int\limits_0^t\varphi_0'(1-\xi)d\xi+\int\limits_0^t\Phi_1(1+)d\xi-\int\limits_0^t\varphi_1(1-\xi)d\xi=$$

$$=\mp[\int\limits_0^t\varphi_0'(\xi)d\xi+\int\limits_0^t\Phi_0'(-\xi)d\xi+\int\limits_0^t\varphi_1(\xi)d\xi-\int\limits_0^t\Phi_1(-\xi)d\xi],$$

или же

$$\Phi_0(1+t)-\varphi_0(1)-\varphi_0(1-t)+\varphi_0(1)+\int\limits_0^t\Phi_1(1+\xi)d\xi-\int\limits_0^t\varphi_1(1-\xi)d\xi=$$

$$=\mp[\varphi_0(t)-\varphi_0(0)-\Phi_0(-t)+\varphi_0(0)+\int\limits_0^t\varphi_1(\xi)d\xi-\int\limits_0^t\Phi_1(-\xi)d\xi].$$

Объединяя полученное выражение с первым соотношением из (18), получим:

$$\begin{cases} \Phi_0(1+t)+\varphi_0(1-t)+\int\limits_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi+\int\limits_{t}^{1+t}\Phi_1(\xi)d\xi= \\ \quad =\pm[\varphi_0(t)+\Phi_0(-t)+\int\limits_{-t}^{0}\Phi_1(\xi)d\xi+\int\limits_{0}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi], \\ \Phi_0(1+t)-\varphi_0(1-t)+\int\limits_0^t\Phi_1(1+\xi)d\xi-\int\limits_0^t\varphi_1(1-\xi)d\xi= \\ \quad =\mp[\varphi_0(t)-\Phi_0(-t)+\int\limits_0^t\varphi_1(\xi)d\xi-\int\limits_0^t\Phi_1(-\xi)d\xi]. \end{cases}$$

Сначала вычитая 2-ое соотношение из 1-ого , а затем складывая 1-ое и 2-ое соотношения, получим следующее:

$$\varphi_0(1-t)+\int\limits_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi=\pm[\varphi_0(t)+\int\limits_0^t\varphi_1(\xi)d\xi],\qquad t\in[0,1], \tag{19}$$

$$\Phi_0(1+t)+\int_1^{1+t}\Phi_1(\xi)d\xi == \pm[\Phi_0(-t)+\int_{-t}^{0}\Phi_1(\xi)d\xi], \quad t\in[0,1]. \tag{20}$$

Из (19), рассматривая знак «+», имеем:

$$\varphi_0(1-t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi=\varphi_0(t)+\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi, \quad t\in[0,\frac{1}{2}], \tag{19$_1$}$$

$$\varphi_0(1-t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi=\varphi_0(t)+\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi, \quad t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{19$_2$}$$

Из (19_1) при замене *t* на 1-*t* получаем:

$$\varphi_0(t)+\int_t^1\varphi_1(\xi)d\xi=\varphi_0(1-t)+\int_0^{1-t}\varphi_1(\xi)d\xi], \quad t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{21}$$

Если вычесть (21) из (19_2), т.е.

$$\varphi_0(1-t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi-\varphi_0(t)-\int_t^1\varphi_1(\xi)d\xi=$$

$$=\varphi_0(t)+\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi-\varphi_0(1-t)-\int_0^{1-t}\varphi_1(\xi)d\xi,$$

или

$$2\varphi_0(1-t)+\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi=2\varphi_0(t)+\int_0^1\varphi_1(\xi)d\xi,$$

или же

$$\varphi_0(1-t)=\varphi_0(t), \ t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{22}$$

Таким образом, $\varphi_0(x)$ при $x\in[0,1]$ является четной функцией относительно $x=\frac{1}{2}$.

Если сложить (19_2) с 21 , т.е.

$$\int_{1-t}^{1}\varphi_1(\xi)d\xi+\int_t^1\varphi_1(\xi)d\xi=\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^{1-t}\varphi_1(\xi)d\xi,$$

и дифференцируя полуенное выражение, имеем:

$$\varphi_1(1-t)-\varphi_1(t)=\varphi_1(t)-\varphi_1(1-t), \ t\in[\frac{1}{2},1],$$

откуда получаем, что

$$\varphi_1(1-t)=\varphi_1(t),\ \ t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{23}$$

Таким образом, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ *являются четными функциями относительно* $x=\frac{1}{2}$ при $x\in[0,1]$.

Итак, доказана следуюшая

Теорема 2. Если вся комплексная плоскость является спектром вспомогательной задачи (4),(8), то для существования решения задачи (1)-(3) начальные данные (3) смешанной задачи (1)-(3) не являются независимыми (произвольно заданными) функциями: как $\varphi_0(x)$, так и $\varphi_1(x)$ нужно задавать на одном из интервалов $[0,\frac{1}{2}]$ или $[\frac{1}{2},1]$ и продолжить их как четные функции.

Если в (19) взять правую часть со знаком «-», тогда получаем:

$$\varphi_0(1-t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi=-\varphi_0(t)-\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi,\quad t\in[0,\frac{1}{2}], \tag{19$_3$}$$

и

$$\varphi_0(1-t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi=-\varphi_0(t)-\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi,\quad t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{19$_4$}$$

Далее в (19_4) заменим t на 1-t, т.е.

$$\varphi_0(t)+\int_{t}^{1}\varphi_1(\xi)d\xi=-\varphi_0(1-t)-\int_0^{1-t}\varphi_1(\xi)d\xi,\quad t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{19$_5$}$$

Наконец, вычитая полученное выражение из (19_4), имеем:

$$\varphi_0(1-t)-\varphi_0(t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi-\int_t^1\varphi_1(\xi)d\xi=$$

$$=-\varphi_0(t)+\varphi_0(1-t)-\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi+\int_0^{1-t}\varphi_1(\xi)d\xi,$$

Откуда после дифференцирования имеем:

$$\varphi_1(1-t)+\varphi_1(t)=-\varphi_1(t)-\varphi_1(1-t),$$

или

$$\varphi_1(t)=-\varphi_1(1-t),\ \ t\in[\frac{1}{2},1], \tag{24}$$

т.е. $\varphi_1(x)$ является нечетной функцией относительно $x=\frac{1}{2}$. Если $\varphi_1(x)$ - непрерывная функция , то тогда $\varphi_1\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

При сложении (19_4) с (19_5) получаем:

$$\varphi_0(1-t)+\varphi_0(t)+\int_{1-t}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi+\int_{t}^{1}\varphi_1(\xi)d\xi=$$

$$=-\varphi_0(t)-\varphi_0(1-t)-\int_0^t\varphi_1(\xi)d\xi-\int_0^{1-t}\varphi_1(\xi)d\xi,$$

или

$$2\varphi_0(1-t)+2\varphi_0(t)+2\int_0^1\varphi_1(\xi)d\xi=0. \tag{25}$$

Учитывая, что $\varphi_1(x)$ при $x\in[0,1]$ является нечетной функцией относительно $x=\frac{1}{2}$, имеем $\int_0^1\varphi_1(\xi)d\xi=0$, и получаем, что $\varphi_0(x)$ при $x\in[0,1]$ *является также нечетной функцией относительно* $x=\frac{1}{2}$.

Таким образом, получили следующее утверждение:

Теорема 3. Если вся комплексная плоскость является спектром для вспомогательной задачи (4),(9) с комплексным параметром, то для существования решения смешанной задачи (1)-(3)) начальные данные не являются независимыми (произвольно заданными) функциями. Как $\varphi_0(x)$, так и $\varphi_1(x)$ нужно задать на одном из интервалов $[0,\frac{1}{2}]$ или $[\frac{1}{2},1]$ и продолжить их как нечетные функции.

Возвращаясь к формуле (20), легко видеть, что функции $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$присутствуют как при $x\in[1,2]$, так и при $x\in[-1,0]$, т.е. вне интервала$[0,1]$.

Точно так же из (17) при $t\ge1$ второе выражение содержит $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ при $x>1$ и при $x<0$.Что касается первого выражения из (17) при $t\ge1$, то оно содержит $\Phi_0(x)$ вне интервала $[0,1]$, а $\Phi_1(x)$ при всех $x\in R$, но при $x\in[0,1]$ $\Phi_1(x)$присутствует только лишь в виде интеграла. Если выбрать знак «+» в правой части первого выражения (17) , то эти интегралы как в левой части, так и в правой части взаимно сокращаются. Если взять знак «-», то каждый из этих интегралов обращается в нуль лишь потому, что $\Phi_1(x) = \varphi_1(x)$ при $x \in [0,1]$ является нечетной функцией относительно $x = \dfrac{1}{2}$.

Тогда как в обычном случае [5] продолжение начальных функций не зависит от задания этих функций на интервале $[0,1]$. Поэтому, предполагая, что

$$\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0, \quad k = 0,1 , \tag{26}$$

то эти функции в обоих случаях можно продолжить вне $[0,1]$ тождественным нулем. Таким образом, справедлива

Теорема 4. При условиях теоремы 2 или 3, если справедливо соотношение (26), то начальные данные можно продолжить вне интервала $[0,1]$ тождественным нулем.

В этих случаях решение соответствующей смешанной задачи получается из формулы Даламбера (16), где $\Phi_k(x)$ при $k = 0,1,\ x \in R$, являются продолжением начальных данных $\varphi_k(x)$, $k = 0,1,\ x \in (0,1)$.

4. Случай отсутствия спектра

Наконец, возвращаемся к случаю, когда $\Delta(\lambda) \neq 0, \forall \lambda \in$ C, т.е. когда вспомогательная (спектральная) задача (4),(5) не имеет спектра, т.к. тогда граничные условия (5) сводятся к виду (15).

В этом случае, также прибегая к методу характеристик, будем искать решение соотвествующей смешанной задачи (1)-(3) в виде формулы Даламбера (16). Исходя из граничного условия (15) определим продолжение начальных данных из (3):

$$\begin{cases} \Phi_0(1+t) + \Phi_0(1-t) + \displaystyle\int_{1-t}^{1+t} \Phi_1(\xi) d\xi = \\ \quad = \mu[\Phi_0(t) + \Phi_0(-t) + \displaystyle\int_{-t}^{t} \Phi_1(\xi) d\xi],\ t \geq 0 \\ \Phi_0'(1+t) + \Phi_0'(1-t) + \Phi_1(1+t) - \Phi_1(1-t) = \\ \quad = -\mu[\Phi_0'(t) + \Phi_0'(-t) + \Phi_1(t) - \Phi_1(-t)], \end{cases} \tag{27}$$

Пусть $t \in [0,1]$, тогда в (27) учтем начальные условия (3):

$$\begin{cases} \Phi_0(1+t)+\varphi_0(1-t)+\int\limits_{1-t}^{1}\varphi_1(\xi)d\xi+\int\limits_{1}^{1+t}\Phi_1(\xi)d\xi= \\ \quad =\mu[\varphi_0(t)+\Phi_0(-t)+\int\limits_{-t}^{0}\Phi_1(\xi)d\xi]+\int\limits_{0}^{t}\varphi_1(\xi)d\xi], \\ \Phi_0'(1+t)+\varphi_0'(1-t)+\Phi_1(1+t)-\varphi_1'(1-t)= \\ \quad =-\mu[\varphi_0'(t)+\Phi_0'(-t)+\varphi_1(t)-\Phi_1(-t)],\ t\in[0,1],\mu\neq\pm1. \end{cases} \tag{28}$$

Если продифференцировать первое соотношение из (28), то имеем:

$$\mp\begin{cases} \Phi_0'(1+t)+-\varphi_0(1-t)+\varphi_1(1-t)+\Phi_1(1+t)= \\ \quad =\mu[\varphi_0'(t)-\Phi_0'(-t)+\Phi_1(-t)+\varphi_1(t)], \\ \Phi_0'(1+t)+\varphi_0'(1-t)+\Phi_1(1+t)-\varphi_1'(1-t)= \\ \quad =-\mu[\varphi_0'(t)+\Phi_0'(-t)+\varphi_1(t)-\Phi_1(-t)],\ t\in[0,1],\mu\neq\pm1, \end{cases}$$

$$-2\varphi_0'(1-t)+2\varphi_1(1-t)=\mu[\varphi_0'(t)+2\varphi_1(t)],$$

$$2\Phi_0'(1+t)+2\Phi_1(1+t)=\mu[-2\Phi_0'(-t)+2\Phi_1(-t)],\ t\in[0,1],\mu\neq\pm1,$$

или

$$\varphi_1(1-t)-\varphi_0'(1-t)=\mu[\varphi_0'(t)+\varphi_1(t)],\ t\in[0,1],\mu\neq\pm1, \tag{29}$$

$$\Phi_0'(1+t)+\Phi_1(1+t)=\mu[-\Phi_0'(-t)+\Phi_1(-t)],\ t\in[0,1],\mu\neq\pm1\,. \tag{30}$$

Теперь, учитывая, что (29) является ограничением на начальные данные смешанной задачи (1)-(3), представим его в виде:

$$\varphi_1(1-t)-\varphi_0'(1-t)=\mu[\varphi_0'(t)+\varphi_1(t)],\ t\in[0,\frac{1}{2}],\mu\neq\pm1, \tag{29_1}$$

и

$$\varphi_1(1-t)-\varphi_0'(1-t)=\mu[\varphi_0'(t)+\varphi_1(t)],\ t\in[\frac{1}{2},1],\mu\neq\pm1. \tag{29_2}$$

В формуле (29_1) заменяя tна 1-t, имеем:

$$\varphi_1(t)-\varphi_0'(t)=\mu[\varphi_0'(1-t)+\varphi_1(1-t)],\ t\in[\frac{1}{2},1],\mu\neq\pm1. \tag{31}$$

Теперь объединяя (29_2) с (31) приходим к следующей системе:

$$\pm\begin{cases} \varphi_1(t)+\varphi_0'(t)=\dfrac{1}{\mu}[\varphi_1(1-t)-\varphi_0'(1-t)], \\ \varphi_1(t)-\varphi_0'(t)=\mu[\varphi_0'(1-t)+\varphi_1(1-t)],\ t\in[\frac{1}{2},1],\mu\neq\pm1, \end{cases}.$$

откуда получаем для $\mu\neq\pm1$

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}+\mu\right)\varphi_1(1-t)+\frac{1}{2}\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\varphi_0'(1-t),\ \ t\in[\frac{1}{2},1], \tag{32}$$

$$\varphi_0'(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}-\mu\right)\varphi_1(1-t)-\frac{1}{2}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\varphi_0'(1-t),\ \ t\in[\frac{1}{2},1]. \tag{33}$$

Этим доказана следующая

Теорема 5. Если вспомогательная (спектральная) задача (4),(5) не имеет спектра, т.е. справедливо граничное условие (15) (или (15')), то для существования решений смешанной задачи (1)-(3) начальные данные не являются произвольными функциями на (0,1), т.е. они являются зависимыми так, что достаточно произвольно задать $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$ и определить их на отрезке $[\frac{1}{2},1]$ с помощью соотношений (32) и (33).

Учитывая, что в (30) $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ определены при $x\in(-1,0)$ и $x\in(1,2)$, они не зависят от начальных данных при $x\in(0,1)$.

Точно так же из (27) при $t\geq 1$ после дифференцирования первого выражения они связывают $\Phi_0(x)$ и $\Phi_1(x)$ при $x\geq 1$ и $x\leq 0$, т.е. и они не зависят от начальных данных.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6. Пусть начальные данные $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ непрерывно дифференцируемые при $x\in(0,1)$ и, соответственно, непрерывные функции при $x\in[0,1]$, удовлетворяющие условию

$$\varphi_k(0)=\varphi_k(1)=0,\ \ k=0,1\ ,$$

и для вспомогательной граничной задачи (4),(5) либо вся плоскость является спектром либо спектр отсутствует. Тогда для существования решения смешанной задачи (1)-(3) начальные данные не могут быть заданы произвольно, т.е. они задаются на отрезке $[0,\frac{1}{2}]$ и определенным образом продолжаются на $[\frac{1}{2},1]$. Вне $[0,1]$ они продолжаются как нулевые функции и решения соответсвующей смешанной задачи получаются методом характеристик.

Аналогичные задачи для уравнения теплопроводности остаются открытыми.

5. Нерешенные задачи

Исходя из схем, приведенных в работах [6]-[13], предлагаем исследовать следующие задачи.

Пусть $D \subset R^n$ - ограниченная область, выпуклая по направлению x_n. При ортогональном проектировании области D на гиперплоскость $x_n = 0$ (параллельно x_n) граница $\Gamma = \overline{D} \setminus D$ области D разбивается на две части Γ_1 и Γ_2, имеющие уравнения $x_n = \gamma_k(x_1, x_2, ..., x_{n-1}), k = 1,2$. Граница Γ есть поверхность Ляпунова.

1. Рассмотреть смешанную задачу для уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_1},\ x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2,\ t > 0,$$

$$\alpha_1(x_1)u(x_1, \gamma_1(x_1), t) + \alpha_2(x_1)u(x_1, \gamma_2(x_1), t) = 0,\ x_1 \in [a_1, b_1], t \ge 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \overline{D},$$

и подобрать $\alpha_1(x_1)$, $\alpha_2(x_1)$ так, чтобы после разделения переменных или преобразования Лапласа полученная спектральная задача либо не имела спектра, либо вся плоскость являлась спектром для этой задачи.

2. Рассмотреть смешанную задачу:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2},\ x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2,\ t > 0,$$

$$\sum_{k=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{2} \alpha_{ijk}(x_1)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j} + \alpha_{ik}(x_1)u(x,t)\right]\Bigg|_{x_2=\gamma_k(x_1)} = 0,\ i = 1,2,\ x_1 \in [a_1, b_1],\ t \ge 0,$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(x),\ k = 0,1; x \in \overline{D},$$

и подобрать коэффициенты α_{ijk} и α_{ik} так, чтобы полученная вспомогательная (спектральная) задача либо не имела спектра, либо вся комплексная плоскость являлась спектром.

3. Исходя из схем работы [14], рассмотреть смешанную задачу для уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2},\ x = (x_1, x_2, x_3) \in D \subset R^3,\ t > 0,$$

подобно задаче 2.

4. Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta_n u(x,t),\ \ x \in D \subset R^n,\ t > 0,$$

$$\alpha_{i0}(x')u(x',\gamma_1(x'))+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x')\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\bigg|_{x_n=\gamma_1(x')}+$$

$$+\beta_{i0}(x')u(x',\gamma_2(x'))+\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}(x')\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_j}\bigg|_{x_n=\gamma_2(x')}=f_i(x'),\ \ i=1,2;\ x'\in S,$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in D,$$

где $\alpha_{ij}(x'),\ \beta_{ij}(x'),\ f_i(x')$ и $\varphi(x)$ заданные вещественнозначные функции.

Коэффициенты граничного условия нужно подобрать так, чтобы полученная вспомогательная граничная задача либо не имела спектра, либо вся комплексная плоскость являлась спектром. Учитывая, что в предыдущих задачах уравнения имели гиперболический тип, вид начальных данных определялся с помощью характеристик рассматриваемого уравнения.

Литература

1. Стеклов В.А., Основные задачи математической физики, ч.I-II, Петроград, с.1922-1923.
2. Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики, М.:Наука, 1973.
3. Диткин В.А., Прудников Л.П., Операционное исчисление, М.:Высшая школа , 1975.
4. Владимиров В.С., Уравнения математической физики, М.:Наука, 1971, 527с.
5. Кошляков Н.С., Глиннер Э.Б., Смирнов М.М., Уравнения в частных производных математической физики, М: Высшая школа, 1970.
6. Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, М.:Наука, 1978.
7. Алиев Н.А., Багиров Г.А., Вычетное представление решений задач, поставленных для уравнения второго порядка в четырехмерном пространстве, Изв. АН Аз.ССР, серия физ.тех.и матем. наук, №5, 1976, с.78-81.
8. Алиев Н.А., Зейналов И.С., Представление решения одной задачи Коши в виде интегрального вычета, жур. Диф. Ур., т.I, №9, 1965, с.1264-1266.
9. Aliyev, N., Jahanshahi M., Sufficient conditions for reduction of the BVP including a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.28, No. 3, 1997, pp.419-425.
10. Aliyev, N., The unsolved problems in differential equation theory and a new method for investigation and solving them, International Congress of Mathematics, Berlin, Germany, August, 1998.

11. Jahanshahi M., Aliyev N., Determining of an analytic function on its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special kind of boundary conditions, Southeast Asian Bulletin Mathematics , Vol.28, No.1, 2004, pp.33-39.
12. Aliev N.A., Mustafayeva Y.Y., Murtuzayeva S.M., The Influence of the Carleman Condition on the Fredholm Property of the Boundary Value Problem for Cauchy-Riemann Equation, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, Baku, Azerbaijan, Vol.1, No.2, 2012, pp.153-162.
13. Sajjadmanesh M., Jahanshahi M., Aliyev N., Tikhonov-Lavrentev type inverse problem including Cauchy-Riemann equation, Azerbaijan Journal of Mathematics, Baku, Vol.3, No.1, 2013, pp.104-110.
14. Aliyev N.; Jahanshahi M. Solution of Poisson's equation with global, local and nonlocal boundary conditions, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , Vol.33 , No.2, 2002, pp.241-247.

Qarişiq məsələlərin həllinin tədqiqində bəzi xüsusi şərtlər

Y.Y. Mustafayeva

XÜLASƏ.

Məqalədə xüsusi xətti sərhəd şərtli simin rəqs tənliyi üçün qarışıq məsələyə baxılır. Bu sərhəd şərtləri belədir ki, dəyişənlərin ayrılmasının və ya Laplas çevirməsi nəticəsində alınmış spektral məsələnin ya heç bir məxsusi ədədi yoxdur, ya da bütün kompleks müstəvi bu sərhəd məsələsinin spektridir. Bu fenomenin səbəbi odur ki, qarışıq məsələnin həll olması üçün ilkin verilənlər ixtiyari deyil, asılı olmalıdırlar.

Açar sözlər: qarışıq spektral məsələ, xüsusi şərtlər, simin rəqs tənliyi, Laplas çevirməsi.

Some special conditions on investigation of the solutions of the mixed problems

Y.Y. Mustafayeva

ABSTRACT

A mixed problem for the equation of string vibrations with special linear boundary conditions is considered in the paper. These boundary conditions are such that, after separation of variables or Laplace transform, the obtained spectral boundary problem either has no eigenvalues or the whole complex plane is the spectrum of this problem. The reason for this phenomenon is that for the existence of solutions of the mixed problem the initial data can not be arbitrary, they must be dependent.

Keywords: mixed spectral problem, special conditions, string vibrations equations, Laplace transform.